ÇARPANLARA AYIRMA

C. İKİ TERİMLİNİN KÜPÜ

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

ÖRNEK

$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 1 + 3x^1 \cdot 1^2 + 1^3$
$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

ÖRNEK

$(x-4y)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot (4y)^1 + 3x^1 \cdot (4y)^2 - (4y)^3$
$= x^3 - 12x^2y + 48xy^2 - 64y^3$

$a^2b + ab^2 = 15$
$a^3 + b^3 = 19$

olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

ÇÖZÜM

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$= a^3 + b^3 + 3(a^2b + ab^2)$
$= 19 + 3(a^2b + ab^2)$
$= 19 + 3 \cdot 15$
$= 19 + 45$
$(a+b)^3 = 64$
$(a+b)^3 = 4^3 \Rightarrow a + b = 4$ bulunur.

(Cevap C)

İki terimlinin (binom) kuvvetlerinin açılımındaki terimlerin katsayıları Paskal üçgeni yardımıyla bulunabilir.

Pascal Üçgeni

$(a+b)^n$ ifadesinin açılımında katsayılar, Pascal üçgeni yardımıyla bulunur. Pascal üçgeninde her satırın ilk ve son sayıları 1'dir.

Bir satırdaki ardışık iki sayının toplamı, alt satırda bu iki sayının arasında yazılan sayıyı verir. Tablo aşağıdaki gibidir.

Aşağıdaki gösterimi inceleyiniz. $(x \pm y \neq 0)$

Paskal Üçgeni

$(x+y)^0 \longleftarrow$ 1
$(x+y)^1 \longleftarrow$ 1 1
$(x+y)^2 \longleftarrow$ 1 2 1
$(x+y)^3 \longleftarrow$ 1 3 3 1
$(x+y)^4 \longleftarrow$ 1 4 6 4 1
$(x+y)^5 \longleftarrow$ 1 5 10 10 5 1

Açılım yapılırken önce a'nın kuvveti n'de başlayarak azalan, b'nin kuvveti 0'dan başlayarak artan kuvvetlerinin çarpımı şeklinde yazılır. Pascal üçgeninde n. sıradaki sayılar katsayı olarak her terimin önüne yerleştirilir.

Mesela $\forall x,y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+$ için
$(y+x)^4 = y^4 + y^3x + y^2x^2 + yx^3 + x^4$

y azalıp
x artar.

Sonra Paskal üçgenindeki $(x+y)^4$ ün katsayıları olan 1, 4, 6, 4, 1 sayılarını yerleştirerek açılımı tamamlarız.

Yani $(y+x)^4 = y^4 + 4y^3x + 6y^2x^2 + 4yx^3 + x^4$ olur.

$(x+y)^n$ açılımında;

1. n + 1 tane terim vardır.
2. Her terimin derecesi n'dir ve x'in üsleri birer azalırken y'nin üsleri birer artmaktadır.
3. Baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimlerin katsayıları eşittir.
4. $(x-y)^n$ açılımındaki katsayıların işaretleri +, −, +, −, ... şeklindedir.
5. Terimlerin üsler toplamı n'yi verir.
6. Terimlerin katsayıları toplamı istenirse değişkenler yerine 1 yazarız.
7. Terimlerin sabit terimi istenirse değişkenler yerine 0 yazarız.

Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

- $\left(\sqrt{2}x + \sqrt{3}y\right)^2 = \left(\sqrt{2}x\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{2}x \cdot \sqrt{3}y + \left(\sqrt{3}y\right)^2$
  $= 2x^2 + 2\sqrt{6}xy + 3y^2$
- $\left(x - \frac{2}{x}\right)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot \frac{2}{x} + 3x\left(\frac{2}{x}\right)^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^3$
  $= x^3 - 6x + \frac{12}{x} - \frac{8}{x^3}$

ÖRNEK

$(2m-5)^3 = (2m)^3 - 3(2m)^2\,5 + 3\cdot 2m\cdot 5^2 - 5^3$

$= 8m^3 - 60m^2 + 150m - 125$

Verilen ifadelerin açılımlarının katsayılarını ipucu olarak değerlendirebilir ve kaçıncı dereceden bir (binom) açılımı olduğunu anlayabiliriz.

ÖRNEK

İki reel sayının toplamı 7, çarpımları 10 ise küpleri toplamı nedir?

ÇÖZÜM

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$7^3 = a^3 + b^3 + 3\cdot 10\cdot 7$

$343 = a^3 + b^3 + 210$

$a^3 + b^3 = 133$ bulunur.

$x = \sqrt[3]{7} + x^3 + 3x^2 + 3x + 29$

toplamının sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 29 B) 30 C) 33 D) 35 E) 37

ÇÖZÜM

$x^3 + 3x^2 + 3x + 29$

$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 28$

$= (x+1)^3 + 28$

$= (\sqrt[3]{7} - 1 + 1)^3 + 28$

$= (\sqrt[3]{7})^3 + 28$

$= 7 + 28$

$= 35$ bulunur.

(Cevap D)

ÖRNEK

$4^x - 3\cdot 2^x - 4 = 0$

ise x = ?

ÇÖZÜM

$a^2 - 3a - 4 = 0$

$a \quad -4$

$a \quad 1$

$(a-4)(a+1)$

$a = 4, a = -1$

$2^x = 4$

$x = 2$ bulunur.

D. İKİ KÜP TOPLAMI VE FARKI

1. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
2. $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

ÖRNEK

$p^3 - 1 = p^3 - 1^3$

$= (p-1)\cdot(p^2 + p\cdot 1 + 1^2)$

$= (p-1)\cdot(p^2 + p + 1)$

ÖRNEK

$m^3 + 1 = m^3 + 1^3$

$= (m+1)\cdot(m^2 - m\cdot 1 + 1^2)$

$= (m+1)\cdot(m^2 - m + 1)$

ÖRNEK

$c^3 - e^3\cdot 8 = c^3 - 2^3\cdot e^3$

$= c^3 - (2e)^3$

$= (c-2e)\cdot(c^2 + c\cdot 2e + (2e)^2)$

$= (c-2e)\cdot(c^2 + 2ce + 4e^2)$

ÖRNEK

$(a-1)^3 + (a+1)^3$

$= (a-1+a+1)\left[(a-1)^2 - (a-1)\cdot(a+1) + (a+1)^2\right]$

$= 2a\cdot(a^2 - \cancel{2a} + 1 - \cancel{a^2} + 1 + \cancel{a^2} + \cancel{2a} + 1)$

$= 2a\cdot(a^2 + 3) = 2a^3 + 6a$

ÖRNEK

$m^3 + n^2m - n^2 - 1$

$= (m^3 - 1) + n^2(m-1)$

$= (m-1)\cdot(m^2 + m + 1) + n^2(m-1)$

$= (m-1)\cdot(m^2 + m + 1 + n^2)$

ÇARPANLARA AYIRMA

1. $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ olduğundan,

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2$$

$$\boxed{x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)}\ \text{olur.}$$

($x + y$, $x \cdot y$ verilmiş ve $x^3 + y^3$ soruluyorsa bu özdeşlik kullanılır.)

2. $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ olduğundan,

$$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3x^2y - 3xy^2$$

$$\boxed{x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)}\ \text{olur.}$$

($x - y$, $x \cdot y$ verilmiş ve $x^3 - y^3$ soruluyorsa bu özdeşlik kullanılır.)

ÖRNEK

$x - y = 7$

$x \cdot y = 6$

olduğuna göre, $x^3 - y^3$ farkı kaçtır?

ÇÖZÜM

$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy \cdot (x-y)$

$x^3 - y^3 = 7^3 + 3 \cdot 6 \cdot 7$

$x^3 - y^3 = 7(7^2 + 18)$

$x^3 - y^3 = 7 \cdot 67 = 469$ bulunur.

ÖRNEK

$$a + \frac{1}{a} = 4$$

olduğuna göre, $a^3 + \dfrac{1}{a^3}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3a \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right)$$

$= 4^3 - 3 \cdot 4$

$= 64 - 12$

$= 52$ olur.

$$x - \frac{3}{x} = 4$$

olduğuna göre, $x^3 - \dfrac{27}{x^3}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 36 B) 48 C) 54 D) 68 E) 100

ÇÖZÜM

$x - \dfrac{3}{x} = 4$ olarak verilmiş.

Her iki tarafın küpü alınırsa,

$$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{x}\right)^3 = 4^3$$

$$\Rightarrow x^3 - \frac{27}{x^3} - 3x\frac{3}{x}\left(x - \frac{3}{x}\right) = 64$$

$$\Rightarrow x^3 - \frac{27}{x^3} - 9 \cdot 4 = 64$$

$$\Rightarrow x^3 - \frac{27}{x^3} = 100 \ \text{bulunur.}$$

(Cevap E)

$$\frac{a^4 - ab^3}{a^2 + ab + b^2} \cdot \frac{(a+b)^2}{a^4 - b^4}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{a-b}{(a+b)^2}$ B) $\dfrac{a-1}{(a+b)^2}$ C) $\dfrac{b(a-b)}{a^2+b^2}$

D) $\dfrac{a(a+b)}{a^2+b^2}$ E) $\dfrac{a^2+b}{a^2+b^2}$

ÇÖZÜM

$$\frac{a^4 - ab^3}{a^2 + ab + b^2} \cdot \frac{(a+b)^2}{a^4 - b^4}$$

$$= \frac{a \cdot (a^3 - b^3)}{a^2 + ab + b^2} \cdot \frac{(a+b)^2}{(a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2)}$$

$$= \frac{a \cdot \cancel{(a-b)} \cdot \cancel{(a^2+ab+b^2)}}{\cancel{a^2+ab+b^2}} \cdot \frac{\cancel{(a+b)} \cdot (a+b)}{\cancel{(a-b)} \cdot \cancel{(a+b)} \cdot (a^2+b^2)}$$

$$= \frac{a \cdot (a+b)}{a^2 + b^2} \ \text{bulunur.}$$

(Cevap D)

4. ÜÇ TERİMLİ İFADELERİ ÇARPANLARA AYIRMA

$x^2 + bx + c$ Şeklindeki Üç Terimlileri Çarpanlara Ayırma

$b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2 + bx + c$ biçimindeki üç terimlileri çarpanlara ayırabilmek için $m + n = b$ ve $m \cdot n = c$ olacak şekilde m ve n gerçel sayılarını bulmamız gerekir.

$m + n = b$ ve $m \cdot n = c$ ise,

$x^2 + bx + c = x^2 + (m + n)\,x + m \cdot n$

$= (x + m)(x + n)$ olur.

Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

- $a^2 - 7a + 12 = a^2 + (-4-3)a + (-4) \cdot (-3)$

  $= (a - 4) \cdot (a - 3)$
- $a^2 + 5a + 6 = a^2 + (3 + 2)a + 3 \cdot 2$

  $= (a + 3) \cdot (a + 2)$
- $n^2 + 2n - 8 = n^2 + (+4-2)n + (+4) \cdot (-2)$

  $= (n + 4) \cdot (n - 2)$
- $n^2 - n - 20 = n^2 + (-5+4)n + (-5) \cdot (+4)$

  $= (n - 5) \cdot (n + 4)$

ÖRNEK

$-x^2 - 3x - 2 = -(x^2 + 3x + 2)$

$= -[x^2 + (2 + 1)x + 2 \cdot 1]$

$= -(x + 2) \cdot (x + 1) = (-x-2) \cdot (x + 1)$

ÖRNEK

$-p^2 - 6p - 5 = -(p^2 + 6p + 5)$

$= -(p^2 + (5 + 1)p + 5 \cdot 1)$

$= -(p + 5) \cdot (p + 1)$ olur.

ÖRNEK

$e^2 + 7e + 12$

ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

Çarpımları 12, toplamları 7 olan iki sayı bulalım.

$\left.\begin{array}{l} m \cdot n = 12 \\ m + n = 7 \end{array}\right\}$ ise $\begin{array}{l} m = 4 \\ n = 3 \end{array}$ olur.

$e^2 + 7e + 12 = (e + 4) \cdot (e + 3)$ bulunur.

b. $ax^2 + bx + c$ Şeklindeki Üç Terimlileri Çarpanlara Ayırma ($a \neq 1$)

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c$ biçimindeki üç terimliler ikinci dereceden olduğu için çarpanları birinci dereceden olmalıdır.

$m, n, k, r \in \mathbb{R}$ ve $m \neq 0$, $n \neq 0$ olmak üzere, çarpanlarımız $mx + n$ ile $kx + r$ olsun. Bu durumda,

$ax^2 + bx + c = (mx + n)(kx + r)$

$= mkx^2 + (mr + nk)\,x + nr$ olur.

Yani $a = mk$, $c = nr$ ve $b = mr + nk$ olmalıdır.

$ax^2 + bx + c = mkx^2 + \boxed{(mr + nk)}x + nr$

$$\begin{array}{ccc} mx & & n \\ kx & & r \end{array}$$

$mrx + nkx = \boxed{(mr + nk)x}$ (ortadaki terim)

ÖRNEK

$3a^2 + 17a + 20 = (3a + 5)(a + 4)$

$$\begin{array}{ccc} 3a & & 5 \\ a & & 4 \end{array}$$

$4 \cdot 3a + 5 \cdot a = 12\,a + 5a$

$= 17a$ (ortadaki terim)

ÖRNEK

$5x^2 + 11x + 2$

ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$5x^2 + 11x + 2$

$$\begin{array}{ccc} 5x & & 1 \\ x & & 2 \end{array}$$

$10x + x = 11x$

$(5x + 1) \cdot (x + 2)$ şeklinde bulunur.

ÖRNEK

$n^2a^2 - na - 2 = (na - 2) \cdot (na + 1)$

$n^2a^2 - na - 2 = (na - 2) \cdot (na + 1)$

$na \quad -2$

$na \quad +1$

$-2na + na = -na$ (ortadaki terim)

ÖRNEK

$6p^2 - 13p + 6 = (2p - 3) \cdot (3p - 2)$

$2p \quad -3$

$3p \quad -2$

$-2 \cdot 2p - 3 \cdot 3p$

$= -4p - 9p$

$= -13p$ (ortadaki terim)

(Üç terimlideki sabit terim $+6 = (-2)(-3)$ şeklinde çarpanlarına ayrıldı.)

ÖRNEK

$2x^2 - 3x - 9$

ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$2x^2 - 3x - 9$

$x \quad -3$

$2x \quad +3$

$-6x + 3x = -3x$

$(2x + 3) \cdot (x - 3)$

ÖRNEK

$6a^2 - 5ab - b^2$

ifadesini çarpanlara ayıralım.

ÇÖZÜM

$6a^2 - 5ab - b^2$

$6a \quad b$

$a \quad -b$

$-6ab + ab$

$= (6a + b)(a - b)$

ÖRNEK

$2x^2 - 3x - 2$

ifadesini çarpanlara ayıralım.

ÇÖZÜM

$2x^2 - 3x - 2$

$$\left.\begin{array}{ll} 2x & 1 \\ 2 & -2 \end{array}\right\} -3x \text{ (ortadaki terim)}$$

$(2x + 1)(x - 2)$

5. TERİM EKLEYİP - ÇIKARMA YOLU İLE ÇARPANLARA AYIRMA

Bazı ifadeler uygun bir terim eklenip-çıkarılarak ve özdeşliklerden yararlanılarak çarpanlarına ayrılabilir.

ÖRNEK

$p^4 + 3p^2 + 4$

ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$p^4 + 3p^2 + 4 = (p^2)^2 + 3p^2 + 2^2 + p^2 - p^2$

$= (p^2)^2 + 2 \cdot 2p^2 + 2^2 - p^2$

$= (p^2 + 2)^2 - p^2$

$= (p^2 + 2 - p) \cdot (p^2 + 2 + p)$

ÖRNEK

$x^4 + x^2b^2 + b^4$

ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$x^4 + x^2b^2 + b^4 = (x^2)^2 + x^2b^2 + (b^2)^2 + x^2b^2 - x^2b^2$

$= (x^2)^2 + 2x^2b^2 + (b^2)^2 - (xb)^2$

$= (x^2 + b^2)^2 - (xb)^2$

$= (x^2 + b^2 + xb) \cdot (x^2 + b^2 - xb)$

ÖRNEK

$m^3 + 3m^2 + 3m - 7$

ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$m^3 + 3m^2 + 3m - 7 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1 - 1 - 7$

$= (m + 1)^3 - 8$

$= (m + 1)^3 - 2^3$

$= (m + 1 - 2) \cdot [(m + 1)^2 + 2 \cdot (m + 1) + 2^2]$

$= (m - 1) \cdot (m^2 + 2m + 1 + 2m + 2 + 4)$

$= (m - 1) \cdot (m^2 + 4m + 7)$

ÇARPANLARA AYIRMA

ÖRNEK

$x^4 + 1$

ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

Verilen ifadeye $2x^2$ ekleyip $2x^2$ çıkaralım.

Buna göre,

$$\begin{aligned} x^4+1 &= x^4+1+2x^2-2x^2 \\ &= (x^4+2x^2+1)-2x^2 \\ &= (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2 \\ &= (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$x^3 + y^3 = (x + y) \cdot (x^2 + xy + y^2)$ dir.

Fakat $x^4 + y^4$ ün böyle bir açılımı yoktur. Çünkü kuvvetler çifttir.

ÖRNEK

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

ÖRNEK

Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

- $x^5 - 3^5 = (x - 3)\cdot(x^4 + x^3\cdot 3^1 + x^2\cdot 3^2 + x^1 \cdot 3^3 + 3^4)$
- $a^5 + b^5 = (a + b) \cdot (a^4 - a^3b^1 + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
- $a^4 - 16 = a^4 - 2^4 = (a - 2) \cdot (a^3 + a^2 \cdot 2^1 + a^1 \cdot 2^1 + a^1 2^2 + 2^3)$

Bir ifade birden fazla çarpanlarına ayırma yöntemi ile çarpanlarına ayrılabilir.

Örneğin; $x^6 - 1 = (x - 1) \cdot (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

veya

$x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 - 1) \cdot (x^3 + 1)$ şeklinde çarpanlarına ayrılabilir.

ÖRNEK

$x^6 + y^6 = (x^2)^3 + (y^2)^3 = (x^2 + y^2) \cdot [(x^2)^2 - x^2y^2 + (y^2)^2]$

$=(x^2 + y^2) \cdot (x^4 - x^2y^2 + y^4)$

şeklinde bir açılımı vardır. (Yine $a^3 + b^3$ şeklinde açılım yapılmıştır.)

1. $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x^2 + x + 1)$

olduğuna göre, $x \neq 1$ olmak üzere,

$\boxed{1+x+x^2+...+x^{n-1}=\dfrac{x^n-1}{x-1}}$ olur.

2. $x^{2n+1} + 1 = (x + 1)(x^{2n} - x^{2n-1} ... - x + 1)$

olduğuna göre, $x \neq -1$ olmak üzere,

$\boxed{1-x+x^2-x^3+...-x^{2n-1}+x^{2n}=\dfrac{x^{2n+1}+1}{x+1}}$ olur.

ÖRNEK

$1 + 5 + 5^2 + ... 5^{28} = B$

olduğuna göre, B kaçtır?

ÇÖZÜM

$1+x+x^2+x^3+...+x^{n-1}=\dfrac{x^n-1}{x-1}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} B &= 1+5+5^2+...+5^{28} \\ &= \frac{5^{28+1}-1}{5-1}=\frac{5^{29}-1}{4} \text{ olur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$x^2 + 2x - 3$

ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} x^2+2x-3 &= x^2+2x+1-4 \\ &= (x^2+2x+1)-4 \\ &= (x+1)^2-2^2 \\ &= (x+1-2)(x+1+2) \\ &= (x-1)(x+3) \end{aligned}$$

6. DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME YÖNTEMİ İLE ÇARPANLARINA AYIRMA

İkinci dereceden daha yüksek dereceli polinomlarda benzer ifadeler, değişken kullanılarak yeniden adlandırılır ve ikinci dereceden bir polinoma dönüştürülür. Bu şekilde kolayca çarpanlarına ayrılır.

ÖRNEK

$\sqrt[3]{m+4}+3\cdot\sqrt[6]{m+4}+2$

ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$m+4 \geq 0$ olmak üzere, $\sqrt[6]{m+4}=n$ olsun.

Bu durumda, $\sqrt[3]{m+4}=n^2$ olur.

$\sqrt[3]{m+4}+3\cdot\sqrt[6]{m+4}+2$

$=n^2+3n+2 \quad =(n+2)\cdot(n+1)$

$$\begin{matrix} n & +2 \\ n & +1 \end{matrix} \quad =\left(\sqrt[6]{m+4}+2\right)\cdot\left(\sqrt[6]{m+4}+1\right)$$

ÖRNEK

$9^x-7\cdot3^x+12$

ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$9^x-7\cdot3^x+12=(3^x)^2-7\cdot3^x+12$

$k>0$ olmak üzere, $3^x=k$ olsun. Buna göre,

$(3x)^2-7\cdot3^x+12=k^2-7k+12 \quad =(k-4)\cdot(k-3)$

$$\begin{matrix} k & -4 \\ k & -3 \end{matrix} \quad =(3^x-4)\cdot(3^x-3) \text{ olur.}$$

RASYONEL İFADELER VE RASYONEL DENKLEMLER

A. RASYONEL İFADELER

Pay ve paydası polinom olan kesirli ifadelere, rasyonel ifadeler denir. Yani, P(x) ve Q(x) gerçel katsayılı iki polinom ve $Q(x)\neq 0$ olmak üzere $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki ifadelere rasyonel ifadeler denir.

Örneğin, $\dfrac{3x-2}{x}$, $\dfrac{x^3-2x^2+x-1}{x-2}$, $\dfrac{x-3}{x-1}$ birer rasyonel ifadedir.

Rasyonel ifadelerde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri rasyonel sayılardakine benzer şekilde yapılır.

1. RASYONEL İFADELERİN SADELEŞTİRİLMESİ

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki bir rasyonel ifadenin pay ve paydası $B(x)\neq 0$ polinomu ile çarpılırsa verilen rasyonel ifadeye denk yeni bir rasyonel ifade elde edilir.

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel ifadesine $\dfrac{P(x)\cdot B(x)}{Q(x)\cdot B(x)}$ rasyonel ifadesinin sadeleşmiş biçimi, $\dfrac{P(x)\cdot B(x)}{Q(x)\cdot B(x)}$ rasyonel ifadesine de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel ifadesinin genişletilmiş biçimi denir.

Verilen bir rasyonel ifade sadeleştirilirken önce rasyonel ifadenin pay ve paydası çarpanlarına ayrılır. Pay ve payda da bulunan ortak çarpanlar sadeleştirilir.

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x+2)}{\cancel{(x-2)}}=x+2$$

ÖRNEK

$$\frac{14a^2b^3c^4}{2a^4b^2c^3}$$

ifadesini sadeleştiriniz.

ÇÖZÜM

$$\frac{14a^2b^3c^4}{2a^4b^2c^3}=\frac{\cancel{2}\cdot7\cdot\cancel{a^2}\cdot\cancel{b^2}\cdot b^1\cdot\cancel{c^3}\cdot c^1}{\cancel{2}\cdot\cancel{a^2}\cdot a^2\cdot\cancel{b^2}\cdot\cancel{c^3}}$$

$$=\frac{7bc}{a^2}$$

ÖRNEK

$$\frac{a^2\cdot x+3ax}{a+3}=\frac{ax\cdot\cancel{(a+3)}}{\cancel{(a+3)}}=ax$$

ÖRNEK

$$\frac{x^5-x^4}{x^2(x-1)}$$

ifadesini sadeleştiriniz.

ÇÖZÜM

$$\frac{x^5-x^4}{x^2(x-1)}=\frac{x^4\,\cancel{(x-1)}}{x^2\,\cancel{(x-1)}}=x^{4-2}=x^2$$

ÖRNEK

$$\frac{ab^3-4a^3b}{ab^2-2a^2b}$$

ifadesini sadeleştiriniz.

ÇÖZÜM

$$\frac{ab^3-4a^3b}{ab^2-2a^2b}=\frac{a\cdot b\cdot(b^2-4a^2)}{a\cdot b\cdot(b-2a)}$$
$$=\frac{b^2-(2a)^2}{b-2a}$$
$$=\frac{\cancel{(b-2a)}\cdot(b+2a)}{\cancel{(b-2a)}}$$
$$=b+2a \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$$\frac{x^4-y^4}{x^3+y^3+x^2y+xy^2}$$

ifadesini sadeleştiriniz.

ÇÖZÜM

$$\frac{x^4-y^4}{x^3+y^3+x^2y+xy^2}=\frac{(x^2)^2-(y^2)^2}{(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)+xy(x+y)}$$
$$=\frac{(x^2-y^2)\cdot(x^2+y^2)}{(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2+xy)}$$
$$=\frac{(x-y)\cdot(x+y)\cdot(x^2+y^2)}{(x+y)\cdot(x^2+y^2)}$$
$$=x-y \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$$\frac{2^{2p+3}-8}{2^{p+2}+4}$$

ifadesini sadeleştiriniz.

ÇÖZÜM

$$\frac{2^{2p+3}-8}{2^{p+2}+4}=\frac{2^{2p}\cdot 2^3-8}{2^p\cdot 2^2+4}$$
$$=\frac{(2^p)^2\cdot 8-8}{2^p\cdot 4+4}\quad (2^p=a \text{ diyelim})$$
$$=\frac{8a^2-8}{4a+4}$$
$$=\frac{8(a^2-1)}{4(a+1)}$$
$$=\frac{2\cdot(a-1)\cdot(a+1)}{(a+1)}$$
$$=2\cdot(a-1)\quad (2^p=a \text{ idi})$$
$$=2\cdot(2^p-1) \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$\frac{ax+6by-2ay-3bx}{ac-2ay}$$

ifadesini sadeleştiriniz.

ÇÖZÜM

$$\frac{ax+6by-2ay-3bx}{ax-2ay}$$
$$=\frac{ax-2ay-3bx+6by}{a(x-2y)}$$
$$=\frac{a(x-2y)-3b(x-2y)}{a(x-2y)}$$
$$=\frac{(x-2y)(a-3b)}{a(x-2y)}$$
$$=\frac{a-3b}{a}$$

ÖRNEK

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+6}$$

ifadesinin en sade biçimini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+6}=\frac{(x-4)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x-2)}$$
$$=\frac{x-4}{x-2} \text{ bulunur.}$$

2. RASYONEL İFADELERDE TOPLAMA VE ÇIKARMA

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ ve $\frac{A(x)}{B(x)}$ rasyonel ifadeleri arasında toplama ve çıkarma işlemleri,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \mp \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{P(x)\cdot B(x) \mp A(x)\cdot Q(x)}{Q(x)\cdot B(x)}$$

(Paydalar eşitlendi.)

şeklinde tanımlanır.

Paydaları farklı rasyonel ifadelerle toplama veya çıkarmada aşağıdaki işlemler yapılır.

1. Pay ve paydalarındaki polinomlar çarpanlara ayrılarak sadeleştirme yapılır.
2. Paydalar eşit olacak şekilde rasyonel ifadeler genişletilir.
3. Payların toplamı veya farkı bulunarak sonuç en sade şekle getirilir.

ÖRNEK

$$\underset{(y)}{\frac{3}{x}} - \underset{(x)}{\frac{5}{y}} = \frac{3y}{xy} - \frac{5x}{xy} = \frac{3y-5x}{xy} \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy}$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

Paydaları eşitleyelim.

$$\underset{(x)}{\frac{x}{yz}} + \underset{(y)}{\frac{y}{xz}} + \underset{(z)}{\frac{z}{xy}} = \frac{x^2+y^2+z^2}{xyz} \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$$\frac{x^2}{x+y} - \frac{y^2}{x+y}$$

işleminin kısaltılmış biçimi nedir?

ÇÖZÜM

$$\frac{x^2}{x+y} - \frac{y^2}{x+y} = \frac{x^2-y^2}{x+y}$$

$$= \frac{(x-y)\cancel{(x+y)}}{\cancel{(x+y)}} = x-y \text{ bulunur.}$$

Sadeleştirme işlemi toplama bittikten sonra yapılır.

ÖRNEK

$$\frac{1}{x^2-4} + \frac{2}{x-2} - 4 = \frac{1}{x^2-4} + \underset{(x+2)}{\frac{2}{x-2}} - \underset{(x^2-4)}{\frac{4}{1}}$$

$$= \frac{1+2(x+2)-4(x^2-4)}{x^2-4}$$

$$= \frac{1+2x+4-4x^2+16}{x^2-4}$$

$$= \frac{-4x^2+2x+21}{x^2-4}$$

ÖRNEK

$$\frac{8}{2a-8} + \frac{a}{4-a}$$

ifadesinin eşitini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\frac{8}{2a-8} + \frac{a}{4-a} = \frac{\cancel{2}\cdot 4}{\cancel{2}(a-4)} - \frac{a}{a-4}$$

$$= \frac{4-a}{a-4} = \frac{-\cancel{(a-4)}}{\cancel{(a-4)}} = -1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} - \frac{x^2}{x^2-4}$$

ifadesinin en sade şeklini bulalım.

ÇÖZÜM

$$= \underset{(x+2)}{\frac{1}{x-2}} - \underset{(x-2)}{\frac{1}{x+2}} - \underset{(1)}{\frac{x^2}{x^2-4}}$$

$$= \frac{x+2-x+2-x^2}{x^2-4}$$

$$= \frac{4-x^2}{x^2-4} = \frac{-(x^2-4)}{x^2-4}$$

$$= -1 \text{ bulunur.}$$

3. RASYONEL İFADELERDE ÇARPMA

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ ve $\frac{F(x)}{D(x)}$ rasyonel ifadelerinin çarpımı,

$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{F(x)}{D(x)} = \frac{P(x) \cdot F(x)}{Q(x) \cdot D(x)}$ şeklinde tanımlanır.

Rasyonel ifadelerin çarpımında pay ve paydalar çarpanlarına ayrılıp sadeleştirmeler yapıldıktan sonra paylar çarpılarak paya, paydalar çarpılarak paydaya yazılır.

> Sadeleştirme işlemi sadece paylar ile paydalar arasında yapılır. Yani pay ile pay veya payda ile payda sadeleşmez.

ÖRNEK

$$\frac{3x^2y}{2ab^2} \cdot \frac{10a^3b}{9xy^2} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot \cancel{y}}{\cancel{2}a \cdot \cancel{b} \cdot b} \cdot \frac{\cancel{2} \cdot 5 \cdot \cancel{a} \cdot a^2 \cdot \cancel{b}}{\cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{y} \cdot y}$$

$$= \frac{5a^2x}{3by}$$

ÖRNEK

$$\frac{a^3-1}{a^2-1} \cdot \frac{a^3+1}{(a^2+a+1)}$$

$$= \frac{(a-1) \cdot (a^2+a+1)}{(a-1) \cdot (a+1)} \cdot \frac{(a+1) \cdot (a^2-a+1)}{(a^2+a+1)}$$

$$= a^2-a+1$$

ÖRNEK

$$\frac{x^3-xy^2}{xy+y^2} \cdot \frac{x^2}{y-x}$$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

ÇÖZÜM

Pay ve paydaları çarpanlara ayırıp sadeleştirelim.

$$\frac{x^3-xy^2}{xy+y^2} \cdot \frac{x^2}{y-x} = \frac{x(x^2-y^2)}{y(x+y)} \cdot \frac{x^2}{y-x}$$

$$= \frac{x(\cancel{x-y}) \cdot (\cancel{x+y})}{y(\cancel{x+y})} \cdot \frac{x^2}{-(\cancel{x-y})}$$

$$= -\frac{x^3}{y} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$\frac{x^2+x+1}{2x^2+5x} \cdot \frac{2x^2+3x-5}{x^3-1}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\frac{x^2+x+1}{2x^2+5x} \cdot \frac{2x^2+3x-5}{x^3-1}$$

$$= \frac{x^2+x+1}{x(2x+5)} \cdot \frac{2x^2+3x-5}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$= \frac{\cancel{x^2+x+1}}{x(\cancel{2x+5})} \cdot \frac{(\cancel{2x+5})(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})(\cancel{x^2+x+1})}$$

$$\left(2x^2+3x-5 = (2x+5)(x-1)\right)$$

$$= \frac{1}{x} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$(x^2-10x+25) \cdot \frac{1}{x-5}$$

işleminin en sade şekli nedir?

ÇÖZÜM

$$= (x^2-10x+25) \cdot \frac{1}{x-5}$$

$$= (x-5)^2 \cdot \frac{1}{x-5}$$

$$= (x-5)(\cancel{x-5}) \cdot \frac{1}{(\cancel{x-5})}$$

$$= x-5 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$\frac{x^2-25}{x^2+4x+3} \cdot \frac{2x+6}{3x-15}$$

ifadesinin en sade halini bulalım.

ÇÖZÜM

$$= \frac{x^2-25}{x^2+6x+3} \cdot \frac{2x+6}{3x-15}$$

$$= \frac{(\cancel{x-5})(x+5)}{(\cancel{x+3})(x+1)} \cdot \frac{2(\cancel{x+3})}{3(\cancel{x-5})}$$

$$= \frac{2(x+5)}{3(x+1)} \text{ bulunur.}$$