3. RASYONEL İFADELERDE ÇARPMA

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *ve* $\dfrac{F(x)}{D(x)}$ rasyonel ifadelerinin çarpımı,

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} \cdot \dfrac{F(x)}{D(x)} = \dfrac{P(x) \cdot F(x)}{Q(x) \cdot D(x)}$ şeklinde tanımlanır.

Rasyonel ifadelerin çarpımında pay ve paydalar çarpanlarına ayrılıp sadeleştirmeler yapıldıktan sonra paylar çarpılarak paya, paydalar çarpılarak paydaya yazılır.

> Sadeleştirme işlemi sadece paylar ile paydalar arasında yapılır. Yani pay ile pay veya payda ile payda sadeleşmez.

ÖRNEK

$$\frac{3x^2y}{2ab^2} \cdot \frac{10a^3b}{9xy^2} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot \cancel{y}}{\cancel{2}a \cdot \cancel{b} \cdot b} \cdot \frac{\cancel{2} \cdot 5 \cdot \cancel{a} \cdot a^2 \cdot \cancel{b}}{\cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{y} \cdot y}$$

$$= \frac{5a^2x}{3by}$$

ÖRNEK

$$\frac{a^3-1}{a^2-1} \cdot \frac{a^3+1}{(a^2+a+1)}$$

$$= \frac{(a-1) \cdot (a^2+a+1)}{(a-1) \cdot (a+1)} \cdot \frac{(a+1) \cdot (a^2-a+1)}{(a^2+a+1)}$$

$$= a^2-a+1$$

ÖRNEK

$$\frac{x^3-xy^2}{xy+y^2} \cdot \frac{x^2}{y-x}$$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

ÇÖZÜM

Pay ve paydaları çarpanlara ayırıp sadeleştirelim.

$$\frac{x^3-xy^2}{xy+y^2} \cdot \frac{x^2}{y-x} = \frac{x(x^2-y^2)}{y(x+y)} \cdot \frac{x^2}{y-x}$$

$$= \frac{x\cancel{(x-y)} \cdot \cancel{(x+y)}}{y\cancel{(x+y)}} \cdot \frac{x^2}{\cancel{-(x-y)}}$$

$$= -\frac{x^3}{y} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$\frac{x^2+x+1}{2x^2+5x} \cdot \frac{2x^2+3x-5}{x^3-1}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\frac{x^2+x+1}{2x^2+5x} \cdot \frac{2x^2+3x-5}{x^3-1}$$

$$= \frac{x^2+x+1}{x(2x+5)} \cdot \frac{2x^2+3x-5}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$= \frac{\cancel{x^2+x+1}}{x\cancel{(2x+5)}} \cdot \frac{\cancel{(2x+5)}\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x^2+x+1)}}$$

$$\left(2x^2+3x-5 = (2x+5)(x-1)\right)$$

$$= \frac{1}{x} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$(x^2-10x+25) \cdot \frac{1}{x-5}$$

işleminin en sade şekli nedir?

ÇÖZÜM

$$= (x^2-10x+25) \cdot \frac{1}{x-5}$$

$$= (x-5)^2 \cdot \frac{1}{x-5}$$

$$= (x-5)\cancel{(x-5)} \cdot \frac{1}{\cancel{(x-5)}}$$

$$= x-5 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$\frac{x^2-25}{x^2+4x+3} \cdot \frac{2x+6}{3x-15}$$

ifadesinin en sade halini bulalım.

ÇÖZÜM

$$= \frac{x^2-25}{x^2+6x+3} \cdot \frac{2x+6}{3x-15}$$

$$= \frac{\cancel{(x-5)}(x+5)}{\cancel{(x+3)}(x+1)} \cdot \frac{2\cancel{(x+3)}}{3\cancel{(x-5)}}$$

$$= \frac{2(x+5)}{3(x+1)} \text{ bulunur.}$$

4. RASYONEL İFADELERDE BÖLME

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ ve $\frac{F(x)}{D(x)}$ rasyonel ifadelerinin bölümü,

$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{F(x)}{D(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{D(x)}{F(x)} = \frac{P(x) \cdot D(x)}{Q(x) \cdot F(x)}$ şeklinde tanımlanır.

Rasyonel ifadelerin bölümünde pay ve paydalar çarpanlarına ayrılır. Birinci rasyonel ifade aynen alınır ve ikinci ifadenin pay ve paydası yer değiştirilerek çarpılır. Gerekli sadeleştirmelerden sonra paylar çarpılarak paya, paydalar çarpılarak paydaya yazılır.

ÖRNEK

$$\frac{a^2+7a+12}{a^2+6a+9} : \frac{a^2+3a-4}{a^2+3a}$$

$$= \frac{\cancel{(a+4)} \cdot \cancel{(a+3)}}{\cancel{(a+3)} \cdot \cancel{(a+3)}} \cdot \frac{a \cdot \cancel{(a+3)}}{\cancel{(a+4)} \cdot (a-1)} = \frac{a}{a-1}$$

ÖRNEK

$$\frac{a^2-7a+12}{a^2-9} : \frac{a^2-3a-4}{a^2+3a}$$

$$= \frac{(a-4) \cdot (a-3)}{(a-3) \cdot (a+3)} \cdot \frac{a(a+3)}{(a-4) \cdot (a+1)}$$

$$= \frac{a}{a+1}$$

ÖRNEK

$$\frac{3a^3}{16} : \frac{15a^2}{4} = \frac{3a^3}{16} \cdot \frac{4}{15a^2} = \frac{\cancel{3}\,\cancel{a^2} \cdot a}{\cancel{4} \cdot 4} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{3} \cdot 5 \cdot \cancel{a^2}} = \frac{a}{20}$$

ÖRNEK

$$\frac{6x^2-5x-6}{\frac{3x+2}{5}} = (3x+2) \cdot (2x-3) \cdot \frac{5}{3x+2} = 5 \cdot (2x-3)$$

$= 10x - 15$

B. RASYONEL DENKLEMLER

P(x) ve Q(x) birer polinom, $Q(x) \neq 0$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki ifadelere **rasyonel fonksiyon**, $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ denklemine de **rasyonel denklem**, bu denklemi sağlayan (varsa) her x reel sayısına da **denklemin kökü** denir.

Rasyonel denklemler çözülürken payın kökleri, yani P(x) = 0 denkleminin kökleri bulunur. Ancak bulunan kökler arasından (varsa) paydayı da sıfır yapan kökler çözüm kümesine dâhil edilmezler.

Bu durumda,

$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow [P(x) = 0 \text{ ve } Q(x) \neq 0]$ olmalıdır.

ÖRNEK

$$\frac{p+2}{p+4} = \frac{p-2}{p-4}$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\frac{p+2}{p+4} = \frac{p-2}{p-4} \quad (p \neq -4,\ p \neq 4)$$

İçler dışlar çarpımı yapalım.

$(p + 2) \cdot (p - 4) = (p - 2) \cdot (p + 4)$

$p^2 - 4p + 2p - 8 = p^2 + 4p - 2p - 8$

$p^2 - 2p - 8 = p^2 + 2p - 8$

$-2p = 2p$

$0 = 4p$

$0 = p$

Ç = {0}

ÖRNEK

$$\frac{m^2-m-2}{m+1} = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{m^2-m-2}{m+1}=0 \Rightarrow (m^2-m-2=0 \text{ ve } m+1\neq 0)$$
$$\Rightarrow (m-2)\cdot(m+1)=0 \text{ ve } m\neq -1)$$

$\Rightarrow$ (m = 2 veya m = –1 ve m ≠ –1)

$m^2 - m - 2 = 0$ denklemini sağlayan m değerleri 2 ile −1 dir. Ancak m = −1 iken payda 0 olduğundan −1 çözüm kümesine konulamaz. Buna göre, çözüm kümesi Ç = {2} olur.

ÖRNEK

$$\frac{(y^2-9)\cdot(y-2)}{y^2+7y+10}=0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$y^2 + 7y + 10 \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{(y^2-9)\cdot(y-2)}{y^2+7y+10}=0 \Rightarrow (y^2-9)\cdot(y-2)=0$$

$\Rightarrow$(y – 3) ·(y + 3) · (y – 2) = 0

$\Rightarrow$(y – 3 = 0 veya y + 3 = 0 veya y – 2 = 0)

$\Rightarrow$(y = 3 veya y = –3 veya y = 2 dir.)

[$y^2 + 7y + 10 \neq 0 \Rightarrow (y + 5)\cdot(y + 2) \neq 0$

$\Rightarrow$(y + 5 ≠ 0 ve y + 2 ≠ 0)

$\Rightarrow$(y ≠ –5 ve y ≠ –2)]

Bulunan 3 değer de verilen denklemin paydasını 0 yapmadığından çözüm kümesine dâhil edilir. Buna göre, verilen denklemin çözüm kümesi,

Ç = {–3, 2, 3} olur.

$$\frac{x^2+ax-8}{x+4}$$

ifadesinin sadeleşebilir olması için a kaç olmalıdır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

ÇÖZÜM

$x^2 + ax - 8$ ifadesinin çarpanları x + 4 olmalıdır.

$x^2 + ax - 8 = (x + 2)(x + k)$

Yani, $x^2 + ax - 8 = 0$ denkleminin bir kökü x = −4 olmalıdır. Bu kök denklemi sağlar.

16 – 4a – 8 = 0 $\Rightarrow$ a = 2 bulunur.

(Cevap B)

3a – 4b + 3c = 0

a · b + b · c = 24

olduğuna göre b^2 kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 12 D) 16 E) 18

ÇÖZÜM

3a – 4b + 3c = 0

3a + 3c = 4b

3 · (a + c) = 4b

$$a+c=\frac{4b}{3}$$

a ·b + b · c = 24

b · (a + c) = 24

$$b\cdot\frac{4\cdot b}{3}=24$$

$$b^2=\frac{24\cdot 3}{4}$$

b^2 = 18 bulunur.

(Cevap E)

$$1-\frac{m-n}{m+n}$$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

A) m + n B) m – n C) $\frac{m+n}{m-n}$

D) $\frac{2n}{m+n}$ E) $\frac{3m}{m-n}$

ÇÖZÜM

Paydalar eşitlendikten sonra işlem yapılır.

$$1-\frac{m-n}{m+n}=\frac{m+n-(m-n)}{m+n}$$
$$=\frac{\cancel{m}+n-\cancel{m}+n}{m+n}$$
$$=\frac{2n}{m+n}$$

(Cevap D)